第５講　数列

1　数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1 が 0 であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\ \cdots\cdots①$$

(1)　$a_2=$ [ア] である。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 b_1 は [イ] である。①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{ウ}}{\left(n+\boxed{エ}\right)\left(n+\boxed{オ}\right)}-\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，[エ] $<$ [オ] とする。

したがって，

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{\boxed{キ}}{n+\boxed{エ}}-\frac{\boxed{キ}}{n+\boxed{オ}}\right)-\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n+1}$$

である。

（1は次ページに続く。）

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{オ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\frac{n-\boxed{\text{ケ}}}{n+\boxed{\text{コ}}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\left(n+\boxed{\text{チ}}\right)}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)　(2)により，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ツ}}^{\,n-\boxed{\text{テ}}}\left(n^2-\boxed{\text{ト}}\right)+\frac{\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ニ}}\right)}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えらえる。ただし，$\boxed{\text{ナ}}<\boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4)　k を自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

2　太郎さんと花子さんは，数列の漸化式に関する問題A，問題Bについて話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

(1)

> **問題A**　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
>
> $a_1=6,\ a_{n+1}=3a_n-8\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

> 花子：これは前に授業で学習した漸化式の問題だね。まず，k を定数として，
>
> $a_{n+1}=3a_n-8$ を $a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ の形に変形するといいんだよね。
>
> 太郎：そうだね。そうすると公比が3の等比数列に結びつけられるね。

(i)　k の値を求めよ。

$k=$ **ア**

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_n=$ **イ** $\cdot$ **ウ** $^{n-1}+$ **エ**

（2は次ページに続く。）

(2)

問題B 次のように定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。 $b_1=4,\ b_{n+1}=3b_n-8n+6\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

花子：求め方の方針が立たないよ。 太郎：そういうときは，$n=1,\ 2,\ 3$ を代入して具体的な数列の様子をみてみよう。 花子：$b_2=10,\ b_3=20,\ b_4=42$ となったけど…。 太郎：階差数列を考えてみたらどうかな。

数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{p_n\}$ を，$p_n=b_{n+1}-b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。

(i) p_1 の値を求めよ。

$p_1=$ [オ]

(ii) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

$p_{n+1}=$ [カ] p_n- [キ]

(iii) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

$p_n=$ [ク] $\cdot$ [ケ] $^{n-1}+$ [コ]

(2は次ページに続く。)

(3)　二人は**問題B**について引き続き会話をしている。

> 太郎：解ける道筋はついたけれど，漸化式で定められた数列の一般項の求め方は一通りではないと先生もおっしゃっていたし，他のやり方も考えてみようよ。
>
> 花子：でも，授業で学習した問題は，**問題A**のタイプだけだよ。
>
> 太郎：では，**問題A**の式変形の考え方を**問題B**に応用してみようよ。**問題B**の漸化式 $b_{n+1}=3b_n-8n+6$ を，定数 s，t を用いて
>
> $$\boxed{\text{サ}}=3\left(\boxed{\text{シ}}\right)$$
>
> の式に変形してはどうかな。

(i)　$q_n=\boxed{\text{シ}}$ とおくと，太郎さんの変形により数列 $\{q_n\}$ が公比 3 の等比数列とわかる。このとき，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまる式を，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　b_n+sn+t

①　$b_{n+1}+sn+t$

②　$b_n+s(n+1)+t$

③　$b_{n+1}+s(n+1)+t$

(ii)　s，t の値を求めよ。

$s=\boxed{\text{スセ}}$，$t=\boxed{\text{ソ}}$

(2は次ページに続く。)

(4)　**問題B**の数列は，(2)の方法でも(3)の方法でも一般項を求めることができる。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_n = \boxed{\text{タ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{チ}}\,n - \boxed{\text{ツ}}$$

(5)　次のように定められた数列 $\{c_n\}$ がある。

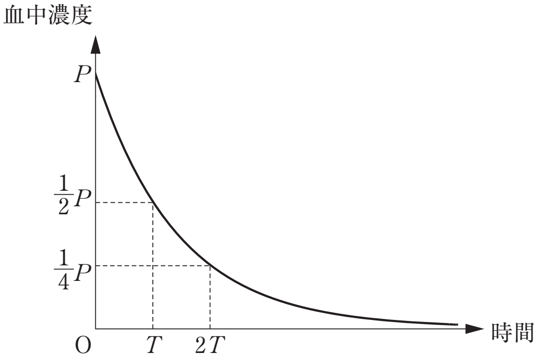
$$c_1 = 16,\quad c_{n+1} = 3c_n - 4n^2 - 4n - 10 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$$c_n = \boxed{\text{テ}} \cdot \boxed{\text{ト}}^{\,n-1} + \boxed{\text{ナ}}\,n^2 + \boxed{\text{ニ}}\,n + \boxed{\text{ヌ}}$$

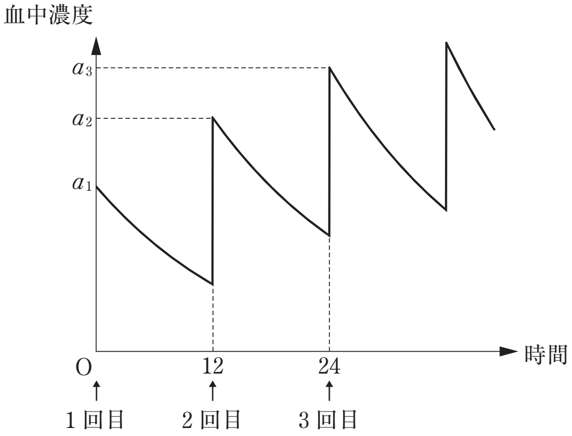
3 次の文章を読んで，下の問いに答えよ。

ある薬Dを服用したとき，有効成分の血液中の濃度（血中濃度）は一定の割合で減少し，T時間が経過すると$\dfrac{1}{2}$倍になる。薬Dを1錠服用すると，服用直後の血中濃度はPだけ増加する。時間0で血中濃度がPであるとき，血中濃度の変化は次のグラフで表される。適切な効果が得られる血中濃度の最小値をM，副作用を起こさない血中濃度の最大値をLとする。



薬Dについては，$M=2$，$L=40$，$P=5$，$T=12$である。

(1) 薬Dについて，12時間ごとに1錠ずつ服用するときの血中濃度の変化は次のグラフのようになる。



（3は次ページに続く。）

n を自然数とする。a_n は n 回目の服用直後の血中濃度である。a_1 は P と一致すると考えてよい。第 $(n+1)$ 回目の服用直前には，血中濃度は第 n 回目の服用直後から時間の経過に応じて減少しており，薬を服用した直後に血中濃度が P だけ上昇する。この血中濃度が a_{n+1} である。

$P=5$，$T=12$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の初項と漸化式は

$$a_1=\boxed{\text{ア}},\quad a_{n+1}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a_n+\boxed{\text{エ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてみよう。

【考え方１】

数列 $\{a_n-d\}$ が等比数列となるような定数 d を求める。$d=\boxed{\text{オカ}}$ に対して，数列 $\{a_n-d\}$ が公比 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ の等比数列になることを用いる。

【考え方２】

階差数列をとって考える。数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が公比 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の等比数列になることを用いる。

いずれの考え方を用いても，一般項を求めることができ，

$$a_n=\boxed{\text{サシ}}-\boxed{\text{ス}}\left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

（３は次ページに続く。）

(2) 薬 D については，$M=2$，$L=40$ である。薬 D を 12 時間ごとに 1 錠ずつ服用する場合，n 回目の服用直前の血中濃度が a_n-P であることに注意して，正しいものを，次の⓪～⑤のうちから**二つ選べ**。 **タ**

⓪ 4 回目の服用までは血中濃度が L を超えないが，5 回目の服用直後に血中濃度が L を超える。

① 5 回目の服用までは血中濃度が L を超えないが，服用し続けるといつか必ず L を超える。

② どれだけ継続して服用しても血中濃度が L を超えることはない。

③ 1 回目の服用直後に血中濃度が P に達して以降，血中濃度が M を下回ることはないので，1 回目の服用以降は適切な効果が持続する。

④ 2 回目までは服用直前に血中濃度が M 未満になるが，2 回目の服用以降は，血中濃度が M を下回ることはないので，適切な効果が持続する。

⑤ 5 回目までは服用直前に血中濃度が M 未満になるが，5 回目の服用以降は，血中濃度が M を下回ることはないので，適切な効果が持続する。

(3) (1)と同じ服用量で，服用間隔の条件のみを 24 時間に変えた場合の血中濃度を調べよう。薬 D を 24 時間ごとに 1 錠ずつ服用するときの，n 回目の服用直後の血中濃度を b_n とする。n 回目の服用直前の血中濃度は b_n-P である。最初の服用から $24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度である $a_{2n+1}-P$ と $b_{n+1}-P$ を比較する。$b_{n+1}-P$ と $a_{2n+1}-P$ の比を求めると，

$$\frac{b_{n+1}-P}{a_{2n+1}-P}=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(3は次ページに続く。)

(4) 薬Dを24時間ごとにk錠ずつ服用する場合には，最初の服用直後の血中濃度はkPとなる。服用量を変化させてもTの値は変わらないものとする。

薬Dを12時間ごとに1錠ずつ服用した場合と24時間ごとにk錠ずつ服用した場合の血中濃度を比較すると，最初の服用から$24n$時間経過後の各服用直前の血中濃度が等しくなるのは，$k=$ [テ] のときである。したがって，24時間ごとにk錠ずつ服用する場合の各服用直前の血中濃度を，12時間ごとに1錠ずつ服用する場合の血中濃度以上とするためには$k \geqq$ [テ] でなくてはならない。

また，24時間ごとの服用量を [テ] 錠にするとき，正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。[ト]

⓪ 1回目の服用以降，服用直後の血中濃度が常にLを超える。

① 4回目の服用直後までの血中濃度はL未満だが，5回目以降は服用直後の血中濃度が常にLを超える。

② 9回目の服用直後までの血中濃度はL未満だが，10回目以降は服用直後の血中濃度が常にLを超える。

③ どれだけ継続して服用しても血中濃度がLを超えることはない。

第５講　数列

1 $a_1=0,\ a_{n+1}=\dfrac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$ ……①

(1) $a_2=\dfrac{4}{2}(3a_1+3^2-2\cdot 3)=\dfrac{4}{2}(3\cdot 0+9-6)=6$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$

$a_1=0$ より $b_1=0$

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{3a_n}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

よって，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

したがって，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)-\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{(n+1)-3}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$n=1$ のとき

$\dfrac{1-2}{3\cdot 2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=0=b_1$ より，この式は $n=1$ のときも成立する。

(3) (2)より $\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n-2}{3(n+1)}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

よって，$a_n=3^{n-1}(n+2)(n-2)+\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$$=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$n+1$，$n+2$ は隣接 2 整数より，いずれか一方が 2 の倍数。

したがって，すべての自然数 n について，a_n は整数となる。

(4)　すべての自然数 n で，$3^{n-1}(n^2-4)$ は 3 で割り切れる。

よって，a_n を 3 で割った余りは，$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ （$=c_n$ とする）を 3 で割った余りである。

$c_{3k}=\dfrac{(3k+1)(3k+2)}{2}$ $\left(k=1 \text{ のとき } \dfrac{4\cdot5}{2}=10 \text{ より}\right)$

c_{3k}，すなわち a_{3k} を 3 で割った余りは 1

$c_{3k+1}=\dfrac{(3k+2)(3k+3)}{2}$ $\left(k=1 \text{ のとき } \dfrac{5\cdot6}{2}=15 \text{ より}\right)$

c_{3k+1}，すなわち a_{3k+1} を 3 で割った余りは 0

$c_{3k+2}=\dfrac{(3k+3)(3k+4)}{2}$ $\left(k=1 \text{ のとき } \dfrac{6\cdot7}{2}=21 \text{ より}\right)$

c_{3k+2}，すなわち a_{3k+2} を 3 で割った余りは 0

$a_1=0$，$a_2=6$ を 3 で割った余りはそれぞれ 0，0 である。

2020 を 3 で割った商は 673，余りは 1 より，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは

$$\sum_{k=1}^{673}(0+0+1)+0=673$$

を 3 で割った余りであり，それは 1 である。

2 (1)　$a_1=6$，$a_{n+1}=3a_n-8$ ……①

$a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ ……②

(i)　②より $a_{n+1}=3a_n-2k$

これと①を比較して $-2k=-8$　よって $k=4$

(ii)　②より $a_{n+1}-4=3(a_n-4)$

数列 $\{a_n-4\}$ は，初項 $a_1-4=2$，公比 3 の等比数列

よって $a_n-4=2\cdot3^{n-1}$　　したがって　$a_n=2\cdot3^{n-1}+4$

(2)　$b_1=4$，$b_{n+1}=3b_n-8n+6$ ……③　　$b_2=10$，$b_3=20$，$b_4=42$

$p_n=b_{n+1}-b_n$ とする。

(i) $p_1=b_2-b_1=10-4=6$

(ii) $b_{n+2}=3b_{n+1}-8(n+1)+6$

よって，$p_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}=3(b_{n+1}-b_n)-8$

$$\begin{array}{rrcrrr} & b_{n+2} & = & 3b_{n+1} & - & 8(n+1)+6 \\ -) & b_{n+1} & = & 3b_n & - & 8n \quad +6 \\ \hline & b_{n+2}-b_{n+1} & = & 3(b_{n+1}-b_n)-8 & & \end{array}$$

したがって　$p_{n+1}=3p_n-8$

(iii) (1)の問題Ａの漸化式と同じ形であるから $p_n=2\cdot3^{n-1}+4$

(3)(i) ③を $b_{n+1}+s(n+1)+t=3(b_n+sn+t)$ ……④　と変形し，

③　　⓪

$q_n=b_n+sn+t$ とおくと，

$q_{n+1}=3q_n$となり，数列$\{q_n\}$が公比３の等比数列とわかる。

(ii) ④より $b_{n+1}=3b_n+2sn+2t-s$

これと③を比較して　$2s=-8$ かつ $-s+2t=6$

したがって　$s=-4$，$t=1$

(4) (3)より　$b_{n+1}-4(n+1)+1=3(b_n-4n+1)$

よって，数列 $\{b_n-4n+1\}$ は，初項 $b_1-4\cdot1+1=1$，公比３の等比数列である。

したがって，$b_n-4n+1=1\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=3^{n-1}+4n-1$

(別解) (2)より　数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{p_n\}$ の一般項が $p_n=2\cdot3^{n-1}+4$

$n\geqq2$ のとき $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}p_k=4+\dfrac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}+4(n-1)=3^{n-1}+4n-1$

$n=1$ のとき $3^0+4\cdot1-1=4=b_1$ より，この式は $n=1$ のときも成立する。

(5) $c_1=16$，$c_{n+1}=3c_n-4n^2-4n-10$ ……⑤

$c_{n+1}+s(n+1)^2+t(n+1)+u=3(c_n+sn^2+tn+u)$ ……⑥　と変形できるとする。

⑥より $c_{n+1}=3c_n+2sn^2+(2t-2s)n+2u-t-s$

これと⑤を比較して $2s=-4$，$2t-2s=-4$，$2u-t-s=-10$

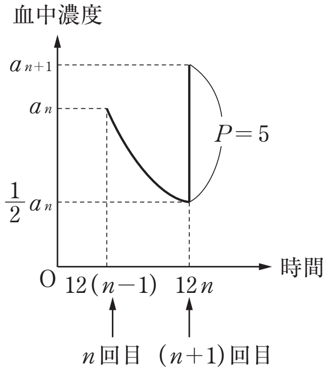
したがって $s=-2$，$t=-4$，$u=-8$

このとき⑥より，$c_{n+1}-2(n+1)^2-4(n+1)-8=3(c_n-2n^2-4n-8)$

よって，数列 $\{c_n-2n^2-4n-8\}$ は，初項 $c_1-2\cdot1^2-4\cdot1-8=2$，公比３の等比数列である。

したがって，$c_n-2n^2-4n-8=2\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$c_n=2\cdot3^{n-1}+2n^2+4n+8$

3 (1)　$a_1=P=5$



$T=12$ より，服用から 12 時間経過すると血中濃度は $\dfrac{1}{2}$ 倍になる。

よって，第 $(n+1)$ 回目の服用直前の血中濃度は $\dfrac{1}{2}a_n$

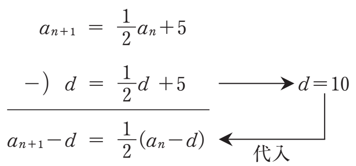
薬を服用すると血中濃度はそこから P すなわち 5 だけ上昇する。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+5$

$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+5$ ……①

【考え方１】

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+5$ は $a_{n+1}-10=\dfrac{1}{2}(a_n-10)$ と変形できる。



よって，数列 $\{a_n-10\}$ は初項 $a_1-10=-5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって　$a_n-10=-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　より　$a_n=10-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

【考え方２】

$a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+5$ ……②，　$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+5=\dfrac{15}{2}$

②－①より　$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は，初項 $a_2-a_1=\dfrac{5}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……③

①－③より　$a_n=\dfrac{1}{2}a_n+5-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　よって　$a_n=10-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)　n 回目の服用直前の血中濃度 a_n-P，服用直後の血中濃度が a_n であることに注目する。

$5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}>0$ より，$a_n=10-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<10<40$

よって，どれだけ服用しても，血中濃度が 40 すなわち L を超えることはない。

したがって，⓪，①は正しくなく，②は正しい。

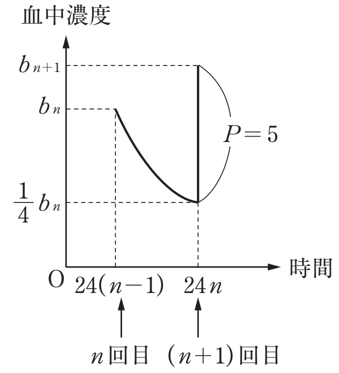
また，$n \geqq 2$ のとき，$5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \leqq \dfrac{5}{2}$　(等号成立は $n=2$ のとき)

よって，$a_n - P = 5 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \geqq 5 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2} > 2$ より，1回目の服用直後に血中濃度が P に達して以降，血中濃度が2すなわち M を下回ることはない。

したがって，③は正しく，④，⑤は正しくない。

以上より，正しいものは ② と ③

(3)　$(n+1)$ 回目の服用直前の血中濃度は $\dfrac{1}{4}b_n$，服用直後の血中濃度は $\dfrac{1}{4}b_n + 5$ より，



$b_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + 5$ ……④，　$b_1 = P = 5$

④は $b_{n+1} - \dfrac{20}{3} = \dfrac{1}{4}\left(b_n - \dfrac{20}{3}\right)$ と変形できる。

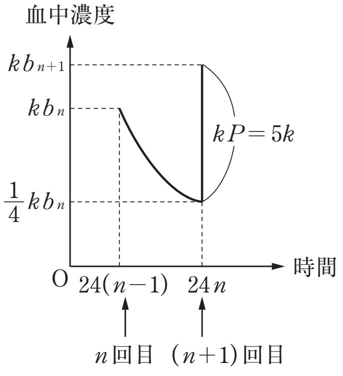
よって，数列 $\left\{b_n - \dfrac{20}{3}\right\}$ は，初項 $b_1 - \dfrac{20}{3} = -\dfrac{5}{3}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列より

$b_n - \dfrac{20}{3} = -\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　　　$b_n = \dfrac{20}{3} - \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

したがって

$$\frac{b_{n+1}-P}{a_{2n+1}-P} = \frac{\left\{\frac{20}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - 5}{\left\{10 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\} - 5} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{5 - 5\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

(4)　薬Dを24時間ごとに k 錠ずつ服用する場合，最初の服用直後の血中濃度が kP となることから，服用直後の血中濃度は kP だけ増加すると判断できる。



1回目の服用直後の血中濃度は $kP = kb_1$ であり，

服用量を変化させても T の値は変わらないことから，

2回目の服用直前の血中濃度は $\dfrac{1}{4}kb_1$，服用直後の血中濃度は $\dfrac{1}{4}kb_1 + kP = k\left(\dfrac{1}{4}b_1 + P\right) = kb_2$ となる。

同様に繰り返すと，n 回目の服用直後の血中濃度は kb_n となる。

したがって，薬 D を 24 時間ごとに k 錠ずつ服用した場合，最初の服用から $24n$ 時間経過後の服用，すなわち $(n+1)$ 回目の服用直前の血中濃度は

$kb_{n+1}-kP=k(b_{n+1}-P)$

これと，薬 D を 12 時間ごとに 1 錠ずつ服用した場合の，最初の服用から $24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度 $a_{2n+1}-P$ が等しくなるのは

$k(b_{n+1}-P)=a_{2n+1}-P$　　すなわち $k=\dfrac{a_{2n+1}-P}{b_{n+1}-P}=3$ のときである

また，24 時間ごとに k 錠ずつ服用する場合の各服用直前の血中濃度を，12 時間ごとに 1 錠ずつ服用する場合の血中濃度以上とするためには

$k(b_{n+1}-P)\geqq a_{2n+1}-P$　　すなわち $k\geqq 3$ でなくてはならない。

また，$k=3$ のとき，n 回目の服用直後の血中濃度は

$$3b_n=20-5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

であり，$5\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}>0$ より，$3b_n=20-5\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}<20<40$ であることから，どれだけ継続して服用しても，血中濃度が 40 すなわち L を超えることはない。

したがって，正しいものは ③